

Notacja Siteswap

Maciej Stankiewicz

Student matematyki i informatyki na Uniwersytecie Gdańskim

XI Matematyczne Warsztaty KaeNeMów
Hel, 25-27 kwietnia 2014



Żonglerka

Definicja (Żonglerka “Klasyczna”)

Żonglerką “klasyczną” nazywamy podrzucanie rękami na zmianę dowolnie ustalonej liczby przedmiotów w taki sposób, że w danym momencie w ręce znajduje się co najwyżej jeden przedmiot.



Powstanie Notacji Siteswap

Notacja siteswap została stworzona niezależnie przez 3 grupy naukowców:[9, 2]

- Santa Cruz California w 1981
- California Institute of Technology w 1985
- University of Cambridge w 1985



CZNCZNCZNCZN...



CZNCZNCZNCZN...

333333333333... \approx 3



CZNCZNCZNCZN...

333333333333... \approx 3

CZZNCCZZNNC...



CZNCZNCZNCZN...

333333333333... ≈ 3

CZZNCCZZNNC...

515151515151... ≈ 51



CZNCZNCZNCZN...

333333333333... ≈ 3

CZZNCCZZNNC...

515151515151... ≈ 51

CZNNZCCZNNZC...



CZNCZNCZNCZN...

333333333333... ≈ 3

CZZNNCCZZNNC...

515151515151... ≈ 51

CZNNZCCZNNZC...

531531531531... ≈ 531



CZNCZNCZNCZN...

33333333333333... ≈ 3

CZZNNCCZZNNC...

515151515151... ≈ 51

CZNNZCCZNNZC...

531531531531... ≈ 531

CZNRRCZNRRCZNR...



CZNCZNCZNCZN...

333333333333... ≈ 3

CZZNCCZZNNC...

515151515151... ≈ 51

CZNNZCCZNNZC...

531531531531... ≈ 531

CZNRRCZNRRCZNR...

444444444444... ≈ 4



Siteswap

Na potrzeby tej prezentacji przyjmujemy że $0 \in \mathbb{N}$

Definicja (Siteswap)

Skończony ciąg liczb naturalnych $(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n$ nazywamy siteswapem, jeśli spełnia następujący warunek:

$$\forall_{j,k \in \{1, \dots, n\}} (j \neq k \implies (s_j + j) \pmod{n} \neq (s_k + k) \pmod{n}) \quad (1)$$

Zbiór wszystkich siteswapów będziemy oznaczać \mathcal{S} .



Podzbiory siteswapów

Definicja (Siteswapy ograniczone)

$$\mathbb{S}^m = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S} : \forall_i s_i \leq m\} \quad (2)$$



Podzbiory siteswapów

Definicja (Siteswapy ograniczone)

$$\mathbb{S}^m = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S} : \forall_i s_i \leq m\} \quad (2)$$

Definicja (Siteswapy o ustalonej długości)

$$\mathbb{S}_n = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S}\} \quad (3)$$



Podzbiory siteswapów

Definicja (Siteswapy ograniczone)

$$\mathbb{S}^m = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S} : \forall_i s_i \leq m\} \quad (2)$$

Definicja (Siteswapy o ustalonej długości)

$$\mathbb{S}_n = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S}\} \quad (3)$$

Definicja (Siteswapy o określonej średniej)

$${}_a\mathbb{S} = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S} : \sum_{i=1}^n s_i/n = a\} \quad (4)$$

Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie (Twierdzenie o wartości średniej)

$$\forall_{s \in \mathcal{S}} \left(\sum_{i=1}^n s_i \right) / n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

*Ponadto średnia ta oznacza ilość piłek danego siteswapu.
Dowód można znaleźć np w [8].*



Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie (Twierdzenie o wartości średniej)

$$\forall_{s \in \mathbb{S}} \left(\sum_{i=1}^n s_i \right) / n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

*Ponadto średnia ta oznacza ilość piłek danego siteswapu.
Dowód można znaleźć np w [8].*

Wniosek (Podział siteswapów)

$$\mathbb{S}^m = \bigcup_{a=0}^m a\mathbb{S}^m \quad (6)$$

$$\mathbb{S} = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} a\mathbb{S} \quad (7)$$

Odwrócenie twierdzenia o wartości średniej

Czy implikacja przeciwna jest spełniona?



Odwrócenie twierdzenia o wartości średniej

Czy implikacja przeciwna jest spełniona?

Oczywiście nie!

$$(3 + 2 + 1)/3 = 2 \in \mathbb{N} \text{ ale } 321 \notin \mathbb{S}$$



Odwrócenie twierdzenia o wartości średniej

Czy implikacja przeciwna jest spełniona?

Oczywiście nie!

$(3 + 2 + 1)/3 = 2 \in \mathbb{N}$ ale $321 \notin \mathbb{S}$

Twierdzenie (Częściowe odwrócenie twierdzenia o wartości średniej)

$$\forall (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n \left(\sum_{i=1}^n s_n \right) / n \in \mathbb{N} \implies \exists \Pi\text{-permutacja } \Pi(a_i) \in \mathbb{S} \quad (8)$$



Ilość siteswapów

Twierdzenie (Ilość siteswapów)

$$|{}_a\mathbb{S}_n| = (a + 1)^n - a^n \quad (9)$$

Dowód można znaleźć w [8]



Regularność siteswapów

Twierdzenie (Twierdzenie o regularności siteswapów ograniczonych)

$$\forall_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^m \in REG \quad (10)$$

Każdy zbiór siteswapów ograniczonych jest językiem regularnym.



Stan siteswapu

Definicja (Stan siteswapu)

Każdemu siteswapowi $s \in {}_a\mathcal{S}^m$ możemy przyporządkować dokładnie jeden jego stan będący ciągiem binarnym o długości m , w którym występuje dokładnie a jedynek.



Stan siteswapu

Definicja (Stan siteswapu)

Każdemu siteswapowi $s \in {}_a\mathbb{S}^m$ możemy przyporządkować dokładnie jeden jego stan będący ciągiem binarnym o długości m , w którym występuje dokładnie a jedynek.

Wniosek (Zbiór stanów)

Zbiór stanów wszystkich siteswapów z ${}_a\mathbb{S}^m$ ma $\binom{m}{a}$ elementów.



Graf stanów

Definicja (Graf stanów)

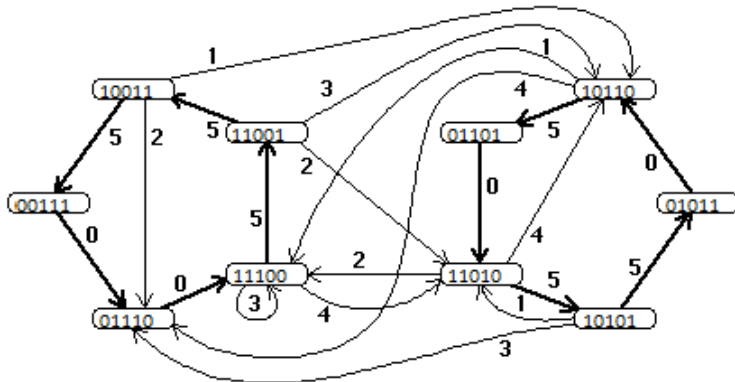
Dla zbioru siteswapów ${}_a\mathcal{S}^m$ możemy skonstruować graf skierowany z odpowiednio etykietowanymi krawędziami, którego wierzchołkami będą stany siteswapów z tego zbioru.

Wtedy wszystkie siteswapy są reprezentowane jako ścieżki zamknięte w takim grafie.



Diagramy stanów[1]

$m = 5, a = 3$



Siteswapy pierwsze

Definicja (Siteswap pierwszy)

Siteswap

$$s \in {}_a\mathbb{S}^m$$

będziemy nazywać siteswapem pierwszym jeżeli

$$\neg \exists_{s_1, s_2 \in {}_a\mathbb{S}^m} s = s_1 s_2 \quad (11)$$



Siteswapy pierwsze - wnioski

Wniosek (Siteswapy pierwsze w grafie stanów)

W grafie stanów siteswapy pierwsze są reprezentowane przez cykle proste.



Siteswapy pierwsze - wnioski

Wniosek (Siteswapy pierwsze w grafie stanów)

W grafie stanów siteswapy pierwsze są reprezentowane przez cykle proste.

Wniosek (Ilość siteswapów pierwszych)

Ilość i długość siteswapów pierwszych w ${}_a\mathbb{S}^m$ jest ograniczona.



Długość najdłuższych siteswapów pierwszych

Jaka jest długość najdłuższego siteswapu pierwszego?



Długość najdłuższych siteswapów pierwszych

Jaka jest długość najdłuższego siteswapu pierwszego?

Ilość wierzchołków jako ograniczenie górne nie jest satysfakcjonujące.



Długość najdłuższych siteswapów pierwszych

Jaka jest długość najdłuższego siteswapu pierwszego?

Ilość wierzchołków jako ograniczenie górne nie jest satysfakcjonujące.

Twierdzenie (Obrotu bitowe)

Zbiór wierzchołków grafu stanów siteswapów ${}_a\mathbb{S}^m$ można podzielić na podzbiory będące cyklami obrotów bitowych.



Długość najdłuższych siteswapów pierwszych 2

Twierdzenie (Przejścia między cyklami obrotów bitowych)

Przejście między cyklami obrotów bitowych zawsze powoduje pominięcie co najmniej jednego wierzchołka z każdego cyklu.



Długość najdłuższych siteswapów pierwszych 2

Twierdzenie (Przejścia między cyklami obrotów bitowych)

Przejście między cyklami obrotów bitowych zawsze powoduje pominięcie co najmniej jednego wierzchołka z każdego cyklu.

Wniosek (Ograniczenie górne)

Ograniczenie górne długości najdłuższego siteswapu pierwszego wynosi:

$$L_{max} = \text{ilość wierzchołków} - \text{ilość cykli przesunięć bitowych}$$



Długość najdłuższych siteswapów pierwszych 2

Twierdzenie (Przejścia między cyklami obrotów bitowych)

Przejście między cyklami obrotów bitowych zawsze powoduje pominięcie co najmniej jednego wierzchołka z każdego cyklu.

Wniosek (Ograniczenie górne)

Ograniczenie górne długości najdłuższego siteswapu pierwszego wynosi:

$$L_{max} = \text{ilość wierzchołków} - \text{ilość cykli przesunięć bitowych}$$

Dla niektórych grafów ograniczenie to jest osiągnięte.



Ilość obrotów bitowych

Twierdzenie (Ilość różnych obrotów bitowych)

Graf stanów siteswapów $s \in {}_a\mathbb{S}^m$ zawiera $\binom{m}{a}$ wierzchołków oraz

$$\frac{1}{m} \sum_{d|\text{GCD}(m,a)} \phi(d) \binom{\frac{m}{d}}{\frac{a}{d}} \quad (12)$$

Cykli obrotów bitowych. Gdzie ϕ to funkcja Eulera.



Pytania otwarte

“Najprostsze” pytanie otwarte

Dla jakich wartości m i a długość najdłuższego siteswapu pierwszego z ${}_a\mathcal{S}^m$ osiąga ograniczenie górne?



Pytania otwarte

“Najprostsze” pytanie otwarte

Dla jakich wartości m i a długość najdłuższego siteswapu pierwszego z ${}_a\mathcal{S}^m$ osiąga ograniczenie górne?

Twierdzenie (Dr. Dietrich Kuske)

Dla $a > 2$, $m = 2a$ ograniczenie górne nie jest osiągnięte.



Inne matematyczne aspekty notacji Siteswap

- Związki z topologią - Grupy warkoczowe
- Rachunek prawdopodobieństwa - żonglerka losowa
- Analiza - funkcyjna definicja Siteswapów
- Algebra - próby wprowadzenia struktur algebraicznych
- Rozszerzenia notacji Siteswap
- Aspekty Fizyczne
- Maszyny żonglujące



Bibliografia I

- [1] The internet juggling database.
Żonglerski portal internetowy (2001-2012).
- [2] rec.juggling.
grupa dyskusyjna.
- [3] S. Mauw A. Engels.
Why men (and octopuses) cannot juggle a four ball cascade.
Technical report, Eindhoven University of Technology
Department of Mathematics and Computing Science, 1999.
- [4] Thomas Lam Allen Knutson and David E. Speyer.
Positroid varieties: juggling and geometry.
Compositio Mathematica, 2013.



Bibliografia II

- [5] Ben Beever.
Guide to juggling patterns.
- [6] Matthew Macauley.
Braids and juggling patterns.
Master's thesis, Harvey Mudd College, 2003.
- [7] Bartłomiej Sulich Maciej Stankiewicz.
Żonglowanie – podrzucanie piłek czy liczb?
In *X Bałtycki Festiwal Nauki*, 2012.
- [8] Anthony Mays.
Combinatorial aspects of juggling.
Master's thesis, University of Melbourne, 2006.



Bibliografia III

- [9] William Murray.
Mathematics & juggling.
nagranie wykładu, obecnie niedostępne.
- [10] Burkard Polster.
The Mathematics of Juggling.
Springer, 2002.

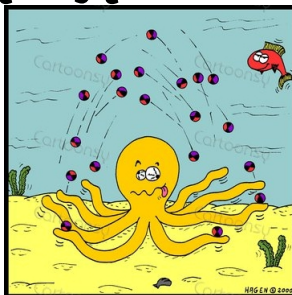


Pytania

Pytania?



Dziękuję za uwagę.



Prezentacja będzie dostępna pod adresem:
www.stankiewicz.edu.pl/matematyk.html

