

UNIwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Maciej Stankiewicz

nr albumu: 195018

Wybrane zagadnienia z teorii ciągów żonglerskich

Praca magisterska na kierunku:

INFORMATYKA

Promotor:

dr hab. Jerzy Topp, prof. nadzw. UG

Gdańsk 2015

Abstrakt

Celem tej pracy jest zaprezentowanie wybranych zagadnień dotyczących teorii ciągów żonglerskich. Dziedzina ta powstała na bazie matematycznego opisu żonglerki znanego powszechnie pod nazwą notacja siteswap. W pracy tej skupiamy się na abstrakcyjnym matematycznym podejściu opartym na definicji ciągów żonglerskich jako pewnej klasy ciągów skończonych. Omawiamy głównie aspekty kombinatoryczne oraz teoriografowe jednak pojawiają się też nawiązania do zagadnień z teorii mnogości, teorii liczb, języków formalnych oraz algebry. Prezentujemy też wyniki obliczeń dla pewnego problemu NP-Zupełnego. We wstępie przedstawiamy aspekty historyczne związków matematyki z żonglerką oraz pokazujemy w jaki sposób z pewnego fizycznego modelu żonglerki otrzymujemy model matematyczny powszechnie nazywany notacją siteswap. W rozdziale pierwszym definiujemy ciągi żonglerskie będące podstawowym elementem tej teorii oraz prezentujemy ich podstawowe własności. W szczególności omawiamy wyniki dotyczące zliczania ciągów żonglerskich oraz ich generowania a także przedstawiamy podstawowe dla tej dziedziny twierdzenie o wartości średniej. W rozdziale drugim utożsamiamy ciągi żonglerskie z cyklami w pewnych grafach. Dzięki temu dowodzimy regularności podzbiorów ciągów żonglerskich. Badamy też zagadnienia rozkładu ciągów żonglerskich analogiczne do rozkładu na liczby pierwsze i prezentujemy wyniki obliczeń komputerowych. W trzecim rozdziale pokazujemy możliwe uogólnienia ciągów żonglerskich. Przedstawiamy też struktury algebraiczne dla pewnych podzbiorów ciągów żonglerskich. W zakończeniu podsumowujemy treść pracy i otrzymane wyniki. Przedstawiamy też inne kierunki badań tej teorii pojawiające się w literaturze.

Słowa kluczowe

ciągi żonglerskie, uogólnione ciągi żonglerskie, siteswap, kombinatoryka, żonglerka, teoria grafów, permutacje, faktoryzacja, języki regularne, struktury algebraiczne, cykle proste, problemy NP-zupełne, obliczenia komputerowe
AMS MSC 2010: Główna 05A05, Dodatkowa 05C38.

Spis treści

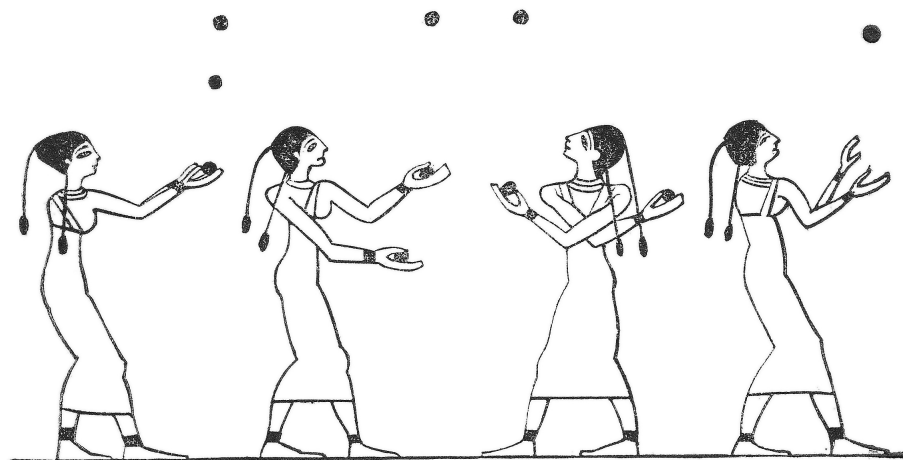
Wprowadzenie	5
0.1. Historia związków matematyki z żonglerką	5
0.2. Podstawy notacji siteswap	7
1. Podstawowe definicje i twierdzenia	11
1.1. Wstępne definicje	11
1.2. Twierdzenia o wartości średniej	12
1.3. Zliczanie ciągów żonglerskich	13
1.4. Generowanie ciągów żonglerskich	15
1.5. Zliczanie ciągów żonglerskich w postaci uogólnionej	17
1.6. Uogólnione twierdzenie o wartości średniej	18
2. Diagramy stanów i ciągi żonglerskie pierwsze	21
2.1. Diagramy stanów	21
2.1.1. Stan ciągu żonglerskiego	21
2.1.2. Graf stanów	23
2.2. Ciągi żonglerskie pierwsze	25
2.2.1. Ciągi żonglerskie pierwsze o maksymalnej długości	26
2.2.2. Komputerowe badanie ciągów żonglerskich pierwszych o maksymalnej długości	28
3. Uogólnienia ciągów żonglerskich	33
3.1. Multipleksowe ciągi żonglerskie	33
3.2. Ciągi żonglerskie o wartościach całkowitych	36
3.3. Struktury algebraiczne na zbiorach ciągów żonglerskich	38
Zakończenie	41
Bibliografia	44
Oświadczenie	47

Wprowadzenie

0.1. Historia związków matematyki z żonglerką

Matematyka i żonglerka to dziedziny, które na pozór nie mają nic wspólnego. Matematyka to nauka dedukcyjna, ścisła, wymagająca niezwykle wyteżonej pracy umysłowej. Mimo, że zajmuje się badaniem abstrakcyjnych bytów, to ze względu na liczne zastosowania, nazywana jest królową nauk. Z drugiej strony żonglerka jest traktowana jako forma sztuki, ale także w dzisiejszych czasach coraz częściej jako dyscyplina sportowa. Wymaga znacznych umiejętności fizycznych, koordynacji ruchowej, szybkości i precyzji. Co ciekawe, zarówno posługiwanie się matematyką, jak i ćwiczenie sztuk żonglerskich jest prawdopodobnie tak stare jak ludzkość. Świadczą o tym najróżniejsze źródła archeologiczne i historyczne dotyczące żonglerki i sztuk cyrkowych, jak również matematyki i wcześniejszych prymitywnych form liczenia.

- “W starożytnym Egipcie już około 4600 roku p.n.e. nad Nilem prezentowali swoje umiejętności kuglarze” [12].
- “Evans wykazał, że przedstawienia o charakterze cyrkowym były prezentowane publicznie już około 2400 roku p.n.e.” [12].
- “Najstarsze obrazkowe przedstawienia żonglerki pochodzą z egipskiego grobowca w Beni Hassan i są datowane na lata 1994-1781 p.n.e.” [13]. Ich fragment przedstawiamy na rysunku 1.
- Kość z Lebombo, jeden z najstarszych obiektów matematycznych, którego wiek szacuje się na 37000 lat [10].
- Joran Friberg, historyk matematyki uważa, że twierdzenie Pitagorasa było znane już przez matematyków z czasów pierwszej dynastii Babilonu około 2000 roku p.n.e. [8].



Rysunek 1. Rysunek z grobowca w Beni Hassan

Dziedziny te, mimo tak długiej historii, rozwijały się zupełnie niezależnie aż do około 1980 roku, kiedy to wybitny matematyk i jeden z twórców informatyki teoretycznej, a hobbistycznie także zongler, Claude E. Shannon przedstawił pierwsze wyniki opisujące zonglerkę w sposób matematyczny. Zostały one znacznie później opublikowane w [18].

Przełomowym momentem okazało się, opracowanie, około roku 1985, niezależnie przez trzy grupy naukowców [4]

- Paul Klimek w University of California, Santa Cruz,
- Bengt Magnusson i Bruce Tiemann w California Institute of Technology,
- Mike Day, Colin Wright i inni w University of Cambridge,

notacji popularnie zwanej siteswap, która dała podstawy ciągom zonglerskim i teorii będącej przedmiotem tej pracy.

Notacja ta, mimo mocno uproszczonego podejścia do zagadnienia zonglowania jak i matematycznej formy, zdobyła bardzo dużą popularność wśród współczesnych zonglerów między innymi dlatego, że:

- umożliwia tworzenie nowych tricków zonglerskich;

- pomaga w nauce tricków trudnych;
- ułatwia komunikację, nawet pomiędzy osobami nie mówiącymi tym samym językiem;
- daje możliwość analizy tricków żonglerskich na wiele sposobów, na przykład pod kątem trudności [1];
- umożliwia wizualizację tricków żonglerskich za pomocą animacji komputerowych.

W kolejnym podrozdziale przedstawiamy koncepcję notacji siteswap i to w jaki sposób opisuje ona żonglerkę.

0.2. Podstawy notacji siteswap

W celu skonstruowania notacji matematycznej przedstawiamy definicję żonglerki jako pewnego procesu fizycznego.

Definicja 1 (Żonglerka klasyczna).

Niech będą dane pewne dyskretne, równo odległe momenty czasu $T = \mathbb{Z}$. Wtedy żonglerką klasyczną nazywamy proces fizyczny polegający na wyrzucaniu i łapaniu pewnej liczby przedmiotów, przy użyciu określonej ilości rąk, który spełnia poniższe warunki.

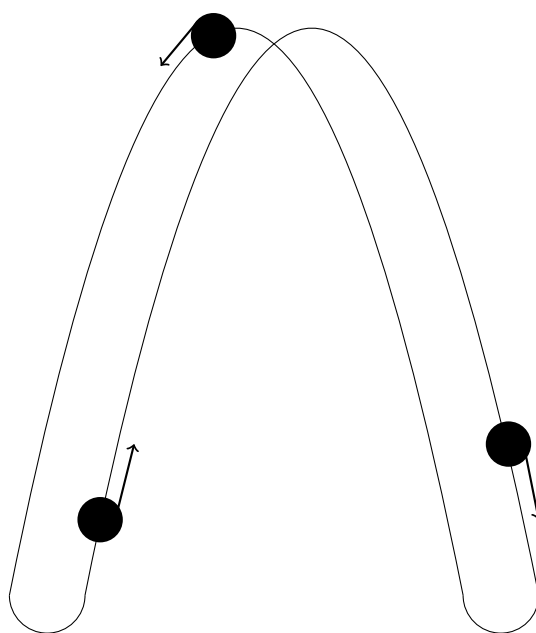
J1 Wyrzuty odbywają się jedynie w dyskretnych momentach $t \in T$,

J2 Wyrzuty wykonywane są na zmianę kolejnymi rękami,

J3 Złapanie wyrzuconego przedmiotu zawsze następuje w pewnym momencie, niekoniecznie dyskretnym, nie wcześniejszym niż wyrzut,

J4 W każdej chwili w ręce znajduje się co najwyżej jeden przedmiot,

J5 Cały proces żonglowania jest okresowy i potencjalnie nieskończony.

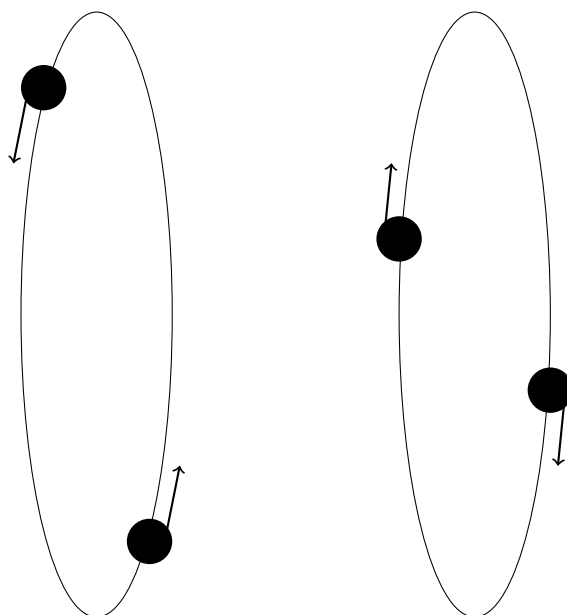


Rysunek 2. Żonglerka trzema piłkami

Zauważmy, że nie ograniczamy się tu do żonglerki dwiema rękami, więc definicja jest poprawna także dla żonglerki wieloosobowej. Ponadto nie jest dla nas istotne miejsce w przestrzeni, w którym następują wyrzut i złapanie ani nawet sam tor ruchu przedmiotu w czasie żonglowania. Co zaskakujące, do żonglowania nie jest potrzebna nawet grawitacja, co pokazał Don Williams żonglując na pokładzie wahadłowca Discovery w 1985 roku [9].

Definicja 2 (Notacja siteswap).

Na podstawie definicji 1 możemy zdefiniować odpowiadający jej ciąg w notacji siteswap następująco. Dla każdego momentu $t \in T$ określamy po jakim czasie przedmiot wyrzucony w danym momencie zostanie wyrzucony ponownie. Pomimo, że pomiędzy wyrzutami nastąpiło oczywiście złapanie, to jego czas nie



Rysunek 3. Żonglerka czterema piłkami

będzie uwzględniany w notacji. Ponieważ wyrzuty zachodzą zawsze w chwili $t \in T$, to otrzymana liczba będzie całkowita. Ponadto, ze względu na fakt, iż złapanie następuje po wyrzucie, a kolejny wyrzut po złapaniu, to będzie to liczba naturalna. Dodatkowo, jeśli w pewnym momencie $t \in T$ nie nastąpił wyrzut, to wtedy przyjmujemy wartość 0. Obliczając powyższe wartości dla każdego $t \in T$, otrzymujemy pewien nieskończony ciąg $\mathbf{j} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$. Ponieważ założyliśmy, że żonglerka jest zjawiskiem okresowym, to również otrzymany ciąg będzie okresowy. Wtedy siteswapem nazwiemy ciąg skończony \mathbf{s} złożony z wyrazów ciągu \mathbf{j} z pewnego jego okresu.

Powyższa definicja, ze względu na różne możliwości wyboru początku okresu, okazuje się niejednoznaczna. Wynika to z faktu, że żonglerzy utożsamiają siteswapy, które są swoimi obrotami bitowymi (zobacz definicja 8), jak i kilkukrotne powtórzenia tego samego ciągu.

Przykład 1.

Załóżmy, że żonglujemy trzema piłkami: czerwoną, zieloną i niebieską. Niech

kolejność wyrzutów w tricku wygląda następująco: czerwona, zielona, niebieska, niebieska, zielona, czerwona, po czym wzór się powtarza. Pod każdym wyrzutem zapisujemy po jakim czasie dana piłka zostanie ponownie wyrzucona i otrzymujemy siteswap.

Tabela 1.

C	Z	N	N	Z	C	C	Z	N	N	Z	C
5	3	1	5	3	1	5	3	1			

Widzimy więc, że dla tego triku otrzymanym siteswapem jest ciąg 531.

Przykład 2.

Rozpatrzmy kolejny analogiczny przykład dla czterech piłek: czerwonej, zielonej, niebieskiej i białej. Niech kolejność wyrzutów w tricku wygląda następująco: czerwona, zielona, niebieska oraz biała, po czym cały wzór się powtarza.

Tabela 2.

C	Z	N	B	C	Z	N	B
4	4	4	4				

Dla tego triku otrzymanym siteswapem jest ciąg 4.

Pomimo, że w mowie potocznej, szczególnie wśród żonglerów, przyjęła się nazwa siteswap, to w pozostałej części pracy ciągi takie nazwiemy ciągami żonglerskimi od angielskiego sformułowania juggling sequences, używanego w literaturze naukowej. Co więcej, nie utożsamimy ciągów żonglerskich, które są swoimi obrotami bitowymi lub wielokrotnymi powtórzeniami tego samego ciągu.

Mimo, że nasze rozważania przedstawiane we wstępie bazują na definicji żonglerki, to w głównej części pracy zajmujemy się badaniem ciągami żonglerskich jako pewnych specyficznych ciągów liczbowych. W tym celu przedstawiamy w rozdziale pierwszym równoważną, abstrakcyjną definicję ciągów żonglerskich.

ROZDZIAŁ 1

Podstawowe definicje i twierdzenia

W poniższym rozdziale przedstawiamy matematyczną definicję ciągu zonglerskiego i pewnych zbiorów ciągów zonglerskich o określonych własnościach. Następnie prezentujemy podstawowe dla tej teorii twierdzenie o wartości średniej. W dalszej części dość szczegółowo omawiamy aspekty zliczania ciągów zonglerskich. Na zakończenie rozdziału pierwszego przedstawiamy metody sprawdzania i generowania ciągów zonglerskich oraz dowodzimy twierdzenie o wartości średniej w bardziej ogólnej postaci. Przyjmujemy, dla uproszczenia notacji, że zero jest liczbą naturalną.

1.1. Wstępne definicje

Definicja 3 (Ciąg zonglerski).

Ciąg liczb naturalnych $(s_i)_{i=1}^n$ długości n nazywamy ciągiem zonglerskim, jeśli dla każdych dwóch różnych indeksów sumy wyrazu i i jego indeksu mają różne reszty przy dzieleniu przez n . Zbiór wszystkich takich ciągów będziemy oznaczać przez \mathbb{S} , czyli przyjmujemy, że

$$\mathbb{S} = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n : \forall_{1 \leq j \neq k \leq n} s_j + j \not\equiv s_k + k \pmod{n}, n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.1)$$

Dla uproszczenia zapisu zamiast (s_1, s_2, \dots, s_n) będziemy, kiedy nie prowadzi to do dwuznaczności, pisać $s_1 s_2 \dots s_n$.

Definicja 4 (Ciągi zonglerskie ograniczone).

Niech m będzie liczbą naturalną. Ciąg zonglerski $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ będziemy nazywać ograniczonym przez parametr m , jeśli $s_i \leq m$ dla $i = 1, \dots, n$. Zbiór takich ciągów zonglerskich będziemy oznaczać przez \mathbb{S}^m , czyli przyjmujemy, że

$$\mathbb{S}^m = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S} : \forall_{1 \leq i \leq n} s_i \leq m, n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.2)$$

Definicja 5 (Ciąg żonglerski o ustalonej długości).

Długością ciągu żonglerskiego $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ nazywamy liczbę n , czyli ilość wyrazów tego ciągu. Dla ustalonej wartości naturalnej n zbiór ciągów żonglerskich długości n będziemy oznaczać przez \mathbb{S}_n .

Definicja 6 (Ciągi żonglerskie o określonej średniej).

Wartością średnią ciągu żonglerskiego $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ nazywamy średnią arytmetyczną jego wyrazów. Zbiór ciągów żonglerskich o średniej równej pewnej liczbie naturalnej a oznaczmy przez ${}_a\mathbb{S}$, czyli przyjmujemy, że

$${}_a\mathbb{S} = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{S} : \sum_{i=1}^n s_i/n = a, n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.3)$$

W tym miejscu uważny czytelnik mógłby zdziwić się, dlaczego parametr przyjmuje jedynie wartości naturalne, mimo iż średnia arytmetyczna taka być nie musi. Stanie się to jasne wkrótce, po przedstawieniu twierdzenia o wartości średniej. Oprócz tego możemy konstruować zbiory ciągów żonglerskich, które spełniają jednocześnie kryteria z kilku powyższych definicji, co prowadzi do określenia następujących podzbiorów: $\mathbb{S}_n^m, {}_a\mathbb{S}^m, {}_a\mathbb{S}_n, {}_a\mathbb{S}_n^m$.

1.2. Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 1 (O wartości średniej).

Wartość średnia każdego ciągu żonglerskiego jest liczbą naturalną.

Dowód tego twierdzenia przedstawimy w dalszej części tekstu w bardziej ogólnej postaci. Bezpośrednio z twierdzenia 1 wynika następujący trywialny wniosek.

Wniosek 1.

Posiadanie średniej, będącą liczbą naturalną, jest warunkiem koniecznym na to, by ciąg był ciągiem żonglerskim.

W zastosowaniach praktycznych sprawdzenie tego warunku może być dużo łatwiejsze niż sprawdzanie z definicji. Analizując treść twierdzenia o wartości średniej, naturalnie nasuwającym się pytaniem jest to czy implikacja przeciwna jest prawdziwa. Jak łatwo odgadnąć, odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Prosty kontrprzykładem może być ciąg 321, który oczywiście ma średnią arytmetyczną wynoszącą 2, jednak nie jest on ciągiem żonglerskim ponieważ $3 + 1 \equiv 2 + 2 \pmod{3}$. Prawdziwa jest natomiast słabsza wersja twierdzenia, którą przedstawiamy poniżej.

Twierdzenie 2 (Częściowe odwrócenie twierdzenia o wartości średniej).

Niech $\mathbf{a} = a_1 a_2 \dots a_n$ będzie ciągiem liczb naturalnych, takim że średnia arytmetyczna jego wyrazów jest liczbą naturalną. Wtedy istnieje permutacja $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ taka, że ciąg $a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(n)}$ jest ciągiem żonglerskim.

Formalny dowód tego twierdzenia przedstawiono w [17, s. 30 - 34].

1.3. Zliczanie ciągów żonglerskich

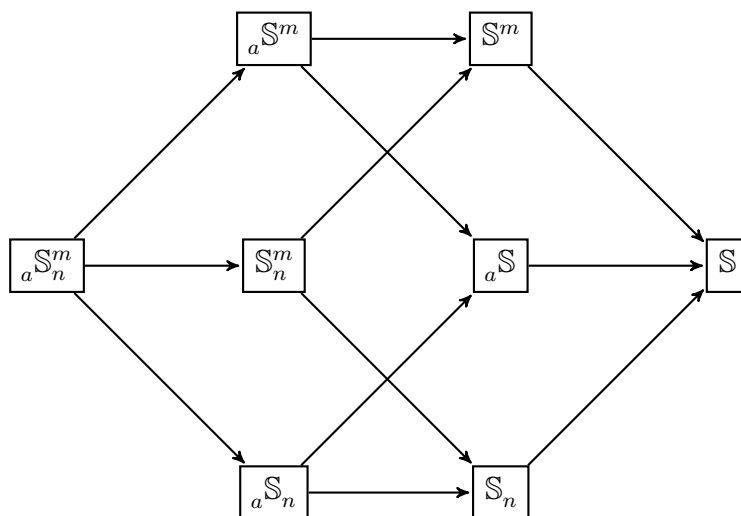
Jak łatwo zauważyć, że wprost z definicji oraz z twierdzenia o wartości średniej wynikają zawierania przedstawione na diagramie 1.1, w którym strzałki oznaczają inkluzje zbiorów.

Wniosek 2 (Zawierania i podział ciągów żonglerskich).

Dla rozłącznych sum mnogościowych prawdziwe są poniższe równości

$$\mathbb{S} = \dot{\bigcup}_{a \in \mathbb{N}} a\mathbb{S} = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_n, \quad (1.4)$$

$$\mathbb{S}^m = \dot{\bigcup}_{a=0}^m a\mathbb{S}^m. \quad (1.5)$$



Rysunek 1.1. Diagram zawierania zbiorów

Stwierdzenie 1 (Moc zbiorów ciągów żonglerskich).

Niech a, n i m będą liczbami naturalnymi, takimi że n jest dodatnie i a jest nie większe niż m . Wtedy zbiory $\mathbb{S}, \mathbb{S}_n, \mathbb{S}^m, {}_a\mathbb{S}$ i ${}_a\mathbb{S}^m$ są mocy alef zero, a zbiory $\mathbb{S}_n^m, {}_a\mathbb{S}_n$ i ${}_a\mathbb{S}_n^m$ są skończone.

Dowód. Wszystkie powyższe klasy, jako podzbiory ciągów skończonych o wartościach naturalnych są, przeliczalne.

Ponieważ nieskończony przeliczalny ciąg a, aa, aaa, \dots jest ciągiem elementów ze zbioru ${}_a\mathbb{S}^m$, więc $|{}_a\mathbb{S}^m| = \aleph_0$. Z zawierania przedstawionych na rysunku 1.1 wynika także, że $|\mathbb{S}| = |\mathbb{S}^m| = |{}_a\mathbb{S}| = |{}_a\mathbb{S}^m| = \aleph_0$. Podobnie nieskończenie wiele ciągów postaci

$$\underbrace{000 \dots 0}_n, \underbrace{111 \dots 1}_n, \underbrace{222 \dots 2}_n, \dots$$

należy do zbioru \mathbb{S}_n , więc także $|\mathbb{S}_n| = \aleph_0$. Z prostego oszacowania otrzymujemy $|{}_a\mathbb{S}_n^m| \leq |\mathbb{S}_n^m| \leq mn < \aleph_0$ oraz $|{}_a\mathbb{S}_n| \leq an^2 < \aleph_0$. \square

W stwierdzeniu 1 pokazaliśmy, że zbiór ciągów żonglerskich o określonej długości n i ustalonej średniej a jest skończony. Poniżej przedstawiamy dużo silniejsze twierdzenie pokazujące dokładną liczbę elementów w zbiorze ${}_a\mathbb{S}_n$.

Twierdzenie 3 (Ilość ciągów zonglerskich).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i n zbiór ${}_a\mathbb{S}_n$ ma dokładnie $(a+1)^n - a^n$ elementów.

Dowód tego faktu można znaleźć w [15, s. 19 - 24].

Fakt 1.

Niech $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ będzie dowolnym ciągiem zonglerskim o długości n i średniej a . Wtedy:

1. *Po dodaniu dowolnej liczby całkowitej z do każdego wyrazu ciągu $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ również otrzymamy ciąg zonglerski $\mathbf{s}' = (s_1 + z)(s_2 + z) \dots (s_n + z)$ o średniej równej $a + z$, o ile tylko nie spowoduje to pojawienia się ujemnych wyrazów w ciągu.*
2. *Po dodaniu (odjęciu) n do jednego dowolnie wybranego wyrazu ciągu również otrzymamy ciąg zonglerski o średniej o jeden większej (mniejszej), o ile przy odejmowaniu nie pojawią się wyrazy ujemne. Oznacza to, że każdy z ciągów $(s_1 + n)s_2 \dots s_n, s_1(s_2 + n) \dots s_n, \dots, s_1 s_2 \dots (s_n + n)$ jest ciągiem zonglerskim o średniej $a + 1$, a każdy z ciągów $(s_1 - n)s_2 \dots s_n, s_1(s_2 - n) \dots s_n, \dots, s_1 s_2 \dots (s_n - n)$ jest ciągiem zonglerskim o średniej $a - 1$, o ile żadna z liczb $s_i - n$ nie jest ujemna.*

1.4. Generowanie ciągów zonglerskich

Definicja 7 (Operacja siteswapu).

Niech $\mathbf{a} = a_1 a_2 \dots a_n$ będzie ciągiem o długości większej niż jeden. Wtedy dla dowolnych dwóch dodatnich liczb całkowitych i oraz j , takich że $i < j \leq n$, które ponadto spełniają nierówność $j - i \leq a_i$, określamy siteswap jako nowy ciąg $S_{i,j}(\mathbf{a})$ postaci

$$(S_{i,j}(\mathbf{a}))_k = \begin{cases} a_j + j - i, & : k = i, \\ a_i + i - j, & : k = j, \\ a_k, & : \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy operację odwrotną $S_{i,j}^{-1}$ daną wzorem

$$S_{i,j}^{-1} = S_{j,i}.$$

Definicja 8 (Operacja obrotu bitowego).

Obrotem bitowym O ciągu $\mathbf{a} = a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n$ o długości co najmniej dwa i wyrazach naturalnych nazywamy nowy ciąg $O(\mathbf{a}) = a_na_1a_2 \dots a_{n-1}$. Podobnie możemy zdefiniować operację odwrotną O^{-1} postaci

$$O^{-1}(\mathbf{a}) = a_2a_3a_4 \dots a_na_1.$$

Jak łatwo zauważyć $O(O^{-1}) = O^{-1}(O) = \text{id}$ oraz $O^n = O^{-n} = \text{id}$.

Lemat 1 (Wewnętrzność operacji siteswapu i obrotu bitowego).

Operacje siteswapu i obrotu bitowego oraz odpowiadające im operacje odwrotne, zamieniają ciągi żonglerskie na ciągi żonglerskie zachowując ich średnią.

Przedstawimy teraz algorytm, który dla danego ciągu decyduje czy jest on ciągiem żonglerskim.

Algorytm 1 (Algorytm spłaszczający [15, s. 10]).

Niech $\mathbf{b} = (b_1b_2 \dots b_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych.

1. Jeśli \mathbf{a} jest ciągiem stałym, zakończ i wydrukuj odpowiedź, że ciąg wejściowy był ciągiem żonglerskim. W przeciwnym przypadku przejdź do punktu drugiego.
2. Niech m będzie największym wyrazem ciągu. Wykonuj obrót bitowy aż do momentu kiedy $a_1 = m$ oraz $a_2 < m$. Jeśli $a_1 - a_2 = 1$ zakończ i wydrukuj, że ciąg wejściowy nie był ciągiem żonglerskim. W przeciwnym wypadku przejdź do punktu trzeciego.
3. Wykonaj operację siteswapu dla pierwszych dwóch wyrazów ciągu po czym przejdź do punktu pierwszego.

Zauważmy, że powyższy algorytm jest poprawny. Trzeci krok zmniejsza wartość jednego z maksymalnych wyrazów ciągu o jeden oraz zwiększa o jeden wyraz mniejszy od maksymalnego o co najmniej dwa. W związku z tym algorytm zawsze się kończy. Jeśli ciąg wejściowy był ciągiem zonglerskim, to używając jedynie operacji przekształcających ciągi zonglerskie na ciągi zonglerskie, algorytm nie może zakończyć się w kroku drugim, bo ciąg tej postaci nie jest ciągiem zonglerskim. Oczywiście również dla ciągu wejściowego nie będącego ciągiem zonglerskim algorytm nigdy nie zakończy się w kroku pierwszym, co dowodzi poprawności algorytmu.

Twierdzenie 4 (Generowanie ciągów zonglerskich [15, s. 10]).

Każdy ciąg zonglerski o długości n i średniej a może być wygenerowany ze stałego ciągu $\mathbf{b} = (b_1 b_2 \dots b_n) = (aa \dots a)$ przez operacje siteswapu i obroty bitowe.

Dowód. Algorytm spłaszczający przedstawiony powyżej, sprowadza dowolny ciąg zonglerski poprzez operacje siteswapu i obroty bitowe do ciągu stałego. Ponieważ możemy odwrócić te operacje, to dowolny ciąg zonglerski otrzymamy z ciągu stałego odwracając algorytm. \square

1.5. Zliczanie ciągów zonglerskich w postaci uogólnionej

W twierdzeniu 3 podaliśmy moc zbioru ciągów zonglerskich o średniej równej a i długości n . W praktyce jednak często stosuje się następujące dwa uproszczenia. Po pierwsze nie rozróżniamy ciągów zonglerskich, które są swoimi obrotami bitowymi. Ponadto odrzucamy te ciągi, których okres podstawowy jest mniejszy niż n . Wtedy zasadnym staje się pytanie o ilość elementów tak zmniejszonego zbioru. Odpowiedź przedstawiamy poniżej w formie twierdzenia pochodzącego z [16].

Definicja 9 (Funkcja μ Möbiusa).

Dla całkowitej liczby dodatniej n i jej rozkładu na iloczyn różnych liczb pierwszych p_i ,

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r},$$

niech $\mu : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ będzie funkcją taką, że

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{gdy wszystkie } e_i \text{ są równe jeden,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Definicja 10 (Wielomiany Möbiusa).

Dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ definiujemy n -ty wielomian Möbiusa $M_n(x)$, gdzie

$$M_n(x) = \sum_{d|n} \mu(n/d)x^d.$$

Twierdzenie 5.

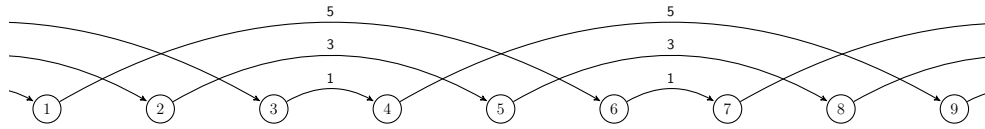
Po przyjęciu uproszczeń przedstawionych powyżej zbiór ciągów zonglerskich długości n i o średniej a jest mocy $\frac{1}{n}(M_n(a+1) - M_n(a))$.

1.6. Uogólnione twierdzenie o wartości średniej

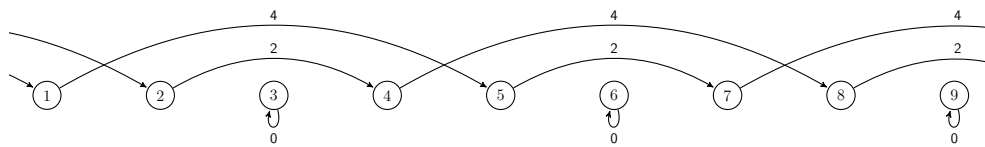
Przedstawimy teraz bardziej ogólną postać twierdzenia o wartości średniej. Do tego potrzebne będą nam poniższe definicje.

Definicja 11 (Funkcja zonglerska).

Funkcją zonglerską nazywamy funkcję $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ taką, że f jest permutacją zbioru \mathbb{Z} oraz dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ zachodzi $f(x) \geq x$. Definiujemy również funkcję wysokości $df : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $df(x) = f(x) - x$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$.



Rysunek 1.2. Orbity funkcji zonglerskiej reprezentującej ciąg 531



Rysunek 1.3. Orbity funkcji zonglerskiej reprezentującej ciąg 420

Definicja 12 (Okresowa funkcja zonglerska).

O funkcji zonglerskiej f mówimy, że jest funkcją okresową o okresie n , jeśli

$$\forall_{i,j \in \mathbb{Z}} i \equiv j \pmod{n} \implies df(i) = df(j).$$

Zauważmy, że istnieje odpowiedniość między ciągami zonglerskimi i funkcjami wysokości okresowych funkcji zonglerskich.

Definicja 13 (Orbita).

Niech f będzie dowolną funkcją zonglerską. Niech \sim będzie relacją w zbiorze \mathbb{Z} , gdzie dla $a, b \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$a \sim b \iff \exists_{n \in \mathbb{Z}} b = f^n(a).$$

Można pokazać, że relacja ta jest relacją równoważności w zbiorze \mathbb{Z} . Jej klasy abstrakcji nazywamy orbitami. Przez $\text{orb}(f)$ oznaczamy liczbę orbit, które nie są jednopunktowe.

Twierdzenie 6 (Uogólnione twierdzenie o wartości średniej [15, s. 13-14]).
Niech f będzie funkcją żonglerską taką, że jej funkcja wysokości df jest ograniczona. Wtedy

$$\text{orb}(f) = \lim_{|I| \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in I} df(x)}{|I|},$$

gdzie granica przebiega po wszystkich odcinkach $I = \{a, a + 1, \dots, b\} \subset \mathbb{Z}$.

Dowód. Ponieważ df jest ograniczona, to istnieje $M = \max\{df(x) : x \in \mathbb{Z}\}$. Weźmy przedział $I = [a, b]$ taki, że $|I| > M$. Wtedy każda niejednopunktowa orbita ma element w I . Ponieważ orbity są rozłączne, liczba orbit niejednopunktowych jest skończona. Można pokazać, że dla każdej niejednopunktowej orbity O zachodzi

$$|I| + 1 - M \leq \sum_{x \in I \cap O} df(x) \leq |I| - 1 + M.$$

Dodajemy do siebie nierówności dla wszystkich orbit niejednopunktowych i dzielimy stronami przez $|I|$ dzięki czemu otrzymujemy

$$\frac{\text{orb}(f)(|I| + 1 - M)}{|I|} \leq \frac{\sum_{x \in I} df(x)}{|I|} \leq \frac{\text{orb}(f)(|I| - 1 + M)}{|I|}.$$

Przechodząc w granicy z $|I|$ do nieskończoności otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Bezpośrednio z twierdzenia, wynika, że jeśli f jest żonglerską funkcją okresową to prawdziwe jest twierdzenie 1.

Diagramy stanów i ciągi żonglerskie pierwsze

2.1. Diagramy stanów

2.1.1. Stan ciągu żonglerskiego

Definicja 14 (Stan ciągu żonglerskiego).

Założmy, że a i m są liczbami naturalnymi, takimi że $a \leq m$. Niech ${}_a\mathbb{M}^m$ będzie zbiorem wszystkich ciągów binarnych długości m , w których występuje dokładnie a jedynek. Wtedy definiujemy funkcję stanu $\phi : {}_a\mathbb{S}^m \rightarrow {}_a\mathbb{M}^m$, która cięgowi żonglerskiemu $\mathbf{s} = s_1s_2 \dots s_n \in {}_a\mathbb{S}^m$ przyporządkowuje ciąg $\phi(\mathbf{s}) = (\phi(\mathbf{s}))_1(\phi(\mathbf{s}))_2 \dots (\phi(\mathbf{s}))_m \in {}_a\mathbb{M}^m$, gdzie

$$(\phi(\mathbf{s}))_i = 1 \iff \exists_{j \in \{1, \dots, n\}} \exists_{k \in \mathbb{N}} i = s_j - (n - j) - (kn).$$

Ponieważ obliczanie stanu ciągu żonglerskiego wprost z definicji jest stosunkowo skomplikowane, przedstawiamy poniżej, w postaci przykładu, prostą metodę graficzną.

Przykład 3 (Wyznaczanie stanu ciągu żonglerskiego).

Niech $\mathbf{s} \in {}_a\mathbb{S}^m$. W lewym górnym rogu tabelki zapisujemy ciąg żonglerski powtarzając go tyle razy, by łączna długość była nie mniejsza od m . Przedłużamy tabelę o m pustych miejsc w prawo. Następnie dla każdej komórki w górnym wierszu, wstawiamy jedynkę w dolnym wierszu przesuniętą o tyle pozycji w prawo, ile wynosi wartość w danej komórce. Po zakończeniu uzupełniamy dolny wiersz zerami. Stan ciągu żonglerskiego odczytujemy z dolnej prawej części tabeli. Procedurę łatwo zrozumieć patrząc na przykładowe tabele 2.1 i 2.2.

Tabela 2.1.

5	1	5	1	5	1					
0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0

$$\phi(51) = 11010$$

Tabela 2.2.

7	5	3	1	7	5	3	1						
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	

$$\phi(7531) = 1111000$$

Definicja 15 (Stany pośrednie ciągu żonglerskiego).

Dla ciągu żonglerskiego $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$ stanami pośrednimi nazywamy stany ciągów żonglerskich $\mathbf{s}, O^{-1}(\mathbf{s}), O^{-2}(\mathbf{s}), \dots, O^{-n+1}(\mathbf{s})$, czyli odpowiednio

$$\phi(\mathbf{s}), \phi(O^{-1}(\mathbf{s})), \phi(O^{-2}(\mathbf{s})), \dots, \phi(O^{-n+1}(\mathbf{s})).$$

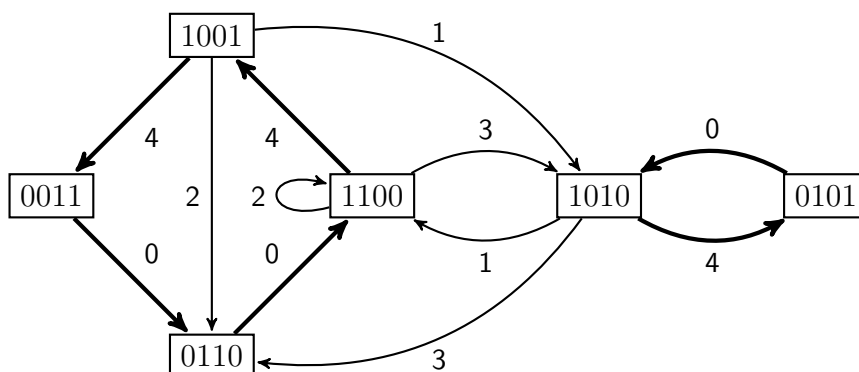
Czasami by uniknąć nieporozumień będziemy stan nazywać stanem głównym dla odróżnienia od innych stanów pośrednich.

Ponieważ definicja stanu głównego i stanów pośrednich jest mało intuicyjna dlatego warto myśleć że stany pośrednie są określone pomiędzy odpowiednimi wyrazami ciągu żonglerskiego $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$. Dodatkowo stan główny jest określony przed i po całym ciągu \mathbf{s} co zostało przedstawione na poniższym schemacie.

$\phi(\mathbf{s})$	$\phi(O^{-1}(\mathbf{s}))$	$\phi(O^{-2}(\mathbf{s}))$	$\phi(O^{-n+1}(\mathbf{s}))$	$\phi(\mathbf{s})$
↓	↓	↓	↓	↓
	s_1	s_2	...	s_n

Lemat 2 (Liczba stanów).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i m , gdzie $a < m$, zachodzi $|{}_a\mathbb{M}^m| = \binom{m}{a}$



Rysunek 2.1. Graf stanów dla ${}_2\mathbb{S}^4$

2.1.2. Graf stanów

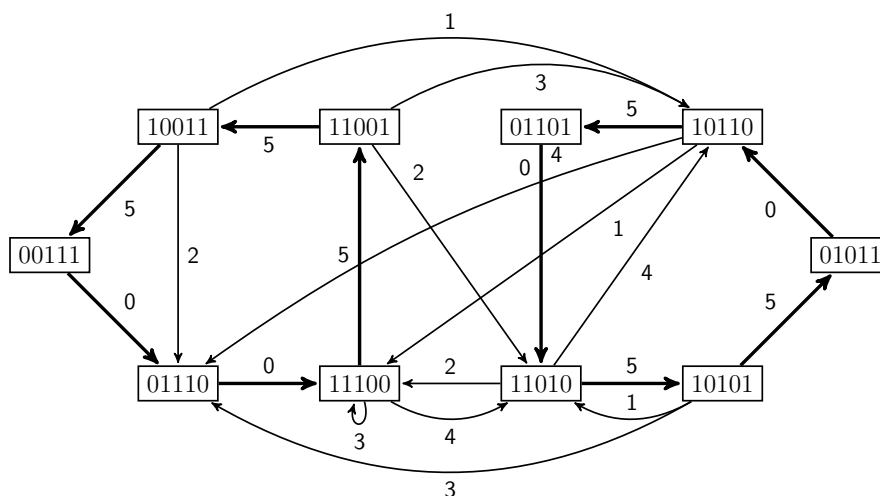
Zdefiniujemy teraz strukturę, która umożliwi badanie ciągów zonglerskich za pomocą metod teorii grafów.

Definicja 16 (Graf stanów).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i m , gdzie $a < m$, definiujemy skierowany graf stanów ${}_a\mathbb{G}^m = ({}_a\mathbb{M}^m, E)$, w którym wierzchołkami są możliwe stany ciągów zonglerskich ze zbioru ${}_a\mathbb{S}^m$. Aby skonstruować krawędzie, dla każdego wierzchołka etykietowanego stanem $\mathbf{M} = M_1M_2 \dots M_m$, będziemy postępować następująco. Jeśli $M_1 = 0$, to z tego wierzchołka będzie wychodzić dokładnie jedna krawędź z etykietą 0 do wierzchołka będącego obrotem cyklicznym $O^{-1}(\mathbf{M})$. W przeciwnym przypadku bierzemy pod uwagę pomocniczy ciąg $\mathbf{X} = M_2M_3 \dots M_m0$. Zamiana dowolnego zerowego elementu ciągu \mathbf{X} na jedynkę spowoduje powstanie pewnego stanu \mathbf{M}' . Łączymy krawędziami stan \mathbf{M} z każdym z możliwych stanów \mathbf{M}' przy czym etykietą danej krawędzi będzie indeks zamienianego elementu ciągu \mathbf{X} .

Twierdzenie 7 (Ciągi zonglerskie w grafie stanów).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i m , gdzie $a < m$, każdy ciąg zonglerski $\mathbf{s} \in {}_a\mathbb{S}^m$ jest reprezentowany przez etykiety krawędzi pewnego cyklu w grafie stanów



Rysunek 2.2. Graf stanów dla ${}_3\mathbb{S}^5$

${}_a\mathbb{G}^m$. Dodatkowo, wierzchołki, przez które przechodzi dany cykl, reprezentują stany pośrednie danego ciągu żonglerskiego.

Dla uzasadnienia zauważmy, że na podstawie odpowiedniego stanu pośredniego i następującego po nim wyrazu ciągu żonglerskiego możemy jednoznacznie określić następny stan częściowy analogicznie do definicji krawędzi w grafie stanów. Podobnie stan zależy od ostatniego stanu pośredniego i ostatniego wyrazu ciągu.

Twierdzenie 8 (Regularność ciągów żonglerskich).

Dla dowolnej liczby naturalnej m zbiór \mathbb{S}^m jest językiem regularnym, czyli językiem typu trzeciego w hierarchii Chomsky'ego.

Dowód. Weźmy liczbę naturalną m dowolnie ustaloną. Z wniosku 2 wiemy, że $\mathbb{S}^m = \dot{\cup}_{a=0}^m {}_a\mathbb{S}^m$. Ponieważ języki regularne są zamknięte na sumy wystarczy pokazać, że ${}_a\mathbb{S}^m \in \text{REG}$ dla każdego $a \leq m$. Jako, że każdemu z ciągów żonglerskich w ${}_a\mathbb{S}^m$ odpowiada jeden stan $\phi \in {}_a\mathbb{M}^m$ wybrany spośród $\binom{m}{a}$ możliwych, to, korzystając po raz kolejny z zamkniętości sumy, wystarczy pokazać, że ciągi żonglerskie o określonym stanie ϕ są regularne. Przypomnijmy teraz, że siteswapy należące do ${}_a\mathbb{S}^m$ o stanie ϕ są reprezentowane

przez cykle w grafie ${}_a\mathbb{G}^m$ rozpoczynające się w wierzchołku odpowiadającym stanowi ϕ . Możemy zatem zdefiniować automat skończony na bazie grafu ${}_a\mathbb{G}^m$, w którym stanem początkowym, jak i jedynym stanem akceptującym, będzie stan odpowiadający ϕ . Automat taki będzie akceptował jedynie słowa odpowiadające etykietom krawędzi cykli a te reprezentują oczywiście ciągi zonglerskie o stanie ϕ . Na mocy istnienia automatu skończonego język jest regularny co kończy dowód. \square

2.2. Ciągi zonglerskie pierwsze

Definicja 17 (Ciągi zonglerskie pierwsze i złożone).

Niech a i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $a < m$. Mówimy, że ciąg zonglerski $\mathbf{s} = s_1s_2 \dots s_n \in {}_a\mathbb{S}^m$ jest złożony, jeśli istnieją ciągi zonglerskie $\mathbf{s}' = s'_1s'_2 \dots s'_i$ oraz $\mathbf{s}'' = s''_1s''_2 \dots s''_j$ należące do ${}_a\mathbb{S}^m$ takie, że $\mathbf{s} = \mathbf{s}'\mathbf{s}''$, czyli $s_1s_2 \dots s_n = s'_1s'_2 \dots s'_is''_1s''_2 \dots s''_j$. W przeciwnym wypadku mówimy, że ciąg zonglerski jest pierwszy.

Twierdzenie 9.

Ciąg zonglerski \mathbf{s} jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy jego wszystkie stany pośrednie są parami różne.

Twierdzenie 10.

W grafie stanów ciągom zonglerskim pierwszym odpowiadają cykle proste.

Wniosek 3.

Niech a i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $a < m$. Wtedy liczba ciągów zonglerskich pierwszych w ${}_a\mathbb{S}^m$ jest skończona.

Twierdzenie 11 (Faktoryzacja ciągów zonglerskich).

Każdy ciąg zonglerski może być przedstawiony jednoznacznie jako konkatencja ciągów zonglerskich pierwszych.

Powyższe twierdzenie można uznać za analogiczne do podstawowego

twierdzenia arytmetyki. Ze względu jednak na fakt, że liczba siteswapów pierwszych jest skończona pojawia się wiele naturalnych pytań o ich postać, ilość i inne własności. Jedno z nich w szczególności przedstawiamy w następnym podrozdziale.

2.2.1. Ciągi zonglerskie pierwsze o maksymalnej długości

Jednym z ciekawych zagadnień jest pytanie jaką długość może mieć ciąg zonglerski w ${}_a\mathbb{S}^m$ dla ustalonych liczb a i m takich, że $a < m$. W poniższej sekcji omawiamy te zagadnienia bazując na [2]. Pierwszym trywialnym ograniczeniem górnym długości siteswapu pierwszego jest ilość wierzchołków w grafie stanów ${}_a\mathbb{G}^m$ wynosząca $\binom{m}{a}$. Wynika to z faktu, że długość cyklu prostego w grafie nie może być większa niż ilość wierzchołków grafu. Okazuje się jednak, że to ograniczenie jest słabe. W dalszej części przedstawimy dokładniejsze ograniczenie, które jest osiągnięte dla niektórych zbiorów siteswapów. W tym celu musimy zrozumieć strukturę grafu stanów.

Twierdzenie 12 (Cykle obrotów bitowych w grafie).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i m takich, że $a < m$, graf ${}_a\mathbb{G}^m$ składa się z rozłącznych cykli prostych takich, że każdy następny wierzchołek w cyklu jest reprezentowany przez kolejne obroty bitowe stanu. Dodatkowo, krawędzie tego cyklu mają jedynie etykiety 0 oraz m odpowiednio w zależności od tego czy pierwszym wyrazem stanu było 0 lub 1. Krawędzie łączące różne cykle obrotów bitowych nazywamy krawędziami łączącymi, a początki i końce tych krawędzi odpowiednio punktami wyjścia i wejścia.

Ideą tworzenia najdłuższych ciągów zonglerskich pierwszych, a więc cykli prostych w grafie stanów, polega na pozostawianiu jak najdłużej w każdym cyklu obrotów bitowych, po którym następuje zmiana cyklu przez krawędź łączącą i procedura powtarza się, aż nie pozostanie już więcej cykli. Uzasadnieniem takiego działania jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 13 (Zmiana cyklu obrotów bitowych).

Przejście przez każdą krawędź łączącą powoduje ominięcie jednego wierzchołka w cyklu obrotów bitowych.

Wniosek 4.

Maksymalna długość ciągu zonglerskiego pierwszego to ilość wierzchołków w grafie stanów minus ilość cykli obrotów bitowych.

Podamy teraz wzór na dokładne obliczanie tej liczby.

Definicja 18 (Funkcja φ Eulera).

Dla dodatniej liczby naturalnej n określamy funkcję Eulera $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wzorem

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

gdzie p_1, p_2, \dots, p_k są czynnikami pierwszymi liczby n bez powtórzeń. Inaczej mówiąc, funkcja $\varphi(n)$ przypisuje liczbie n ilość liczb względnie z nią pierwszych mniejszych lub równych od n .

Twierdzenie 14 (Górne ograniczenie długości ciągu zonglerskiego pierwszego).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i m takich, że $a < m$, długość maksymalnego ciągu zonglerskiego pierwszego w ${}_a\mathbb{S}^m$ jest z góry ograniczona przez

$$\Omega(a, m) = \binom{m}{a} - \frac{1}{m} \sum_{d|\text{NWD}(a,m)} \varphi(d) \binom{m/d}{a/d}.$$

Ciągi zonglerskie pierwsze, których długość jest równa ograniczeniu górnemu nazywać będziemy zupełnymi, a pozostałe niezupełnymi.

Uwaga 1.

Dla pewnych trywialnych grafów stanów, które zawierają tylko jeden cykl obrotów bitowych, maksymalna długość ciągu zonglerskiego pierwszego wynosi $\binom{m}{a}$, czyli więcej niż podaje ograniczenie z powyższego twierdzenia.

Okazuje się, że w zależności od liczb m i a , ciągi żonglerskie pierwsze o maksymalnej długości mogą być zupełne lub nie. Pytanie o to dla jakich liczb istnieją ciągi żonglerskie zupełne pozostaje pytaniem otwartym. Znany jest jedynie częściowy rezultat, który przedstawiamy poniżej.

Twierdzenie 15 (Dietrich Kuske).

Jeśli a jest liczbą naturalną i $a > 2$, to w ${}_a\mathbb{S}^{2a}$ nie ma ciągów żonglerskich zupełnych.

Dowód. Załóżmy, że w ${}_a\mathbb{S}^{2a}$ istnieje ciąg żonglerski zupełny. Rozpatrzmy cykl obrotów bitowych długości dwa w ${}_a\mathbb{G}^{2a}$ złożony ze stanów $1010\dots 10$ oraz $0101\dots 01$. Jedynym punktem wejścia i wyjścia z tego cyklu jest stan $1010\dots 10$. Najpierw pokazujemy, że poprzednikiem stanu $1010\dots 10$ jest $100101\dots 01$. Ponieważ stan musi być postaci $10M_3M_4\dots M_{2a}$, jedyną możliwością otrzymania stanu rozpoczynającego się jedyneką jest krawędź etykietowana jedyneką, więc jest to $100101\dots 01$. Analogicznie, następnik stanu $1010\dots 10$ musi mieć formę $M_1M_2\dots M_{2a-2}10$, więc po przejściu krawędzią z etykietą $2a-1$ otrzymamy stan $0101\dots 010110$. Okazuje się jednak, że stany $100101\dots 01$ oraz $0101\dots 010110$ należą do tego samego cyklu obrotów bitowych więc graf stanów musi mieć dokładnie dwa cykle. Jednak dla $a > 2$ prowadzi to do sprzeczności. \square

2.2.2. Komputerowe badanie ciągów żonglerskich pierwszych o maksymalnej długości

W dzisiejszych czasach, dzięki rozwojowi komputerów, możemy odpowiedzieć na pytanie o zupełność dla pewnych zbiorów ciągów żonglerskich. Niestety problem ten, równoważny pytaniu czy w grafie skierowanym istnieje cykl prosty o zadanej długości jest zagadnieniem NP-zupełnym [6]. Mimo to możemy znaleźć rozwiązanie dla grafów o małych rozmiarach. Co więcej Jack Boyce w [2] prezentuje metodę, która znacznie przyspiesza obliczenia.

Twierdzenie 16 (Odwrócenie ciągu zonglerskiego pierwszego [2]).

Niech a i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $a < m$. Niech \mathbf{s} będzie ciągiem zonglerskim zupełnym w ${}_a\mathbb{S}^m$. Rozpatrzmy stany, które nie należą do cyklu prostego odpowiadającego \mathbf{s} ,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 &= M_{1,1}M_{1,2} \dots M_{1,m}, \\ \mathbf{M}_2 &= M_{2,1}M_{2,2} \dots M_{2,m}, \\ &\vdots \\ \mathbf{M}_{\Omega(a,m)} &= M_{\Omega(a,m),1}M_{\Omega(a,m),2} \dots M_{\Omega(a,m),m}.\end{aligned}$$

Okazuje się, że po odwróceniu każdego z tych stanów otrzymamy nowe stany

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'_1 &= M_{1,m}M_{1,m-1} \dots M_{1,1}, \\ \mathbf{M}'_2 &= M_{2,m}M_{2,m-1} \dots M_{2,1}, \\ &\vdots \\ \mathbf{M}'_{\Omega(a,m)} &= M_{\Omega(a,m),m}M_{\Omega(a,m),m-1} \dots M_{\Omega(a,m),1},\end{aligned}$$

które są stanami pewnego ciągu zonglerskiego $\mathbf{s}' = s_1s_2 \dots s_{\Omega(a,m)}$. Ponadto kolejne wyrazy ciągu \mathbf{s}' są różnicą m oraz kolejnych etykiet krawędzi łączących w \mathbf{s} . Ciągi \mathbf{s}' o takiej własności będziemy nazywać *super pierwszymi*.

Na mocy powyższego twierdzenia problem szukania najdłuższych cykli sprowadziliśmy do zagadnienia znajdowania ciągów zonglerskich super pierwszych, czyli takich cykli prostych w grafie stanów, które mają dokładnie po jednym wierzchołku z każdego cyklu obrotów bitowych stanów. Cykle te są jednak znacznie krótsze, co przyspiesza działanie algorytmu.

Twierdzenie 17 (Dualne ciągi zonglerskie [2]).

Niech a i m będą liczbami naturalnymi takimi że, $a < m$. Wtedy dla każdego ciągu zonglerskiego $\mathbf{s} = s_1s_2 \dots s_{n-1}s_n \in {}_a\mathbb{S}^m$ jego ciągiem zonglerskim dualnym nazywamy ciąg $\mathbf{s}' = (m - s_n)(m - s_{n-1}) \dots (m - s_2)(m - s_1)$. Okazuje się że $\mathbf{s}' \in {}_{m-a}\mathbb{S}^m$. Ponadto, jeśli ciąg zonglerski \mathbf{s} jest pierwszy, to również jego ciąg dualny \mathbf{s}' jest pierwszy. Dlatego szukanie zupełnych ciągów zonglerskich pierwszych można ograniczyć do przypadku kiedy $m \geq 2a$.

Przy użyciu programu “Jdeep” [3] w którym zaimplementowano algorytm szukania ciągów żonglerskich pierwszych oraz sprawdzania zupełności z uwzględnieniem powyższych twierdzeń przeprowadziliśmy obliczenia dla różnych parametrów. W tabeli 2.3 przedstawiamy wyniki tych obliczeń. Pola pogrubione i umieszczone w okręgach przedstawiają nowe wyniki, natomiast reszta jest potwierdzeniem wyników uzyskanych wcześniej przez autora programu.

Analizując przedstawione w tabeli 2.3 wyniki obliczeń widzimy, że istnieją zbiory ciągów żonglerskich niezupełnych inne niż postaci $m = 2a$. Co więcej wszystkie dotychczas zaobserwowane inne zbiory niezupełne mają $a = 3$.

Tabela 2.3. Zestawienie zupełności dla różnych zbiorów ciągów żonglerskich

1 - Ciągi niezupełne na mocy twierdzenia 15.

2 - Ciągi niezupełne dualne na mocy twierdzenia 17.

3 - Po upływie 23 dni obliczenia zostały przerwane.

$m \backslash a$	2	3	4	5	6	7	8	9
3	Z							
4	Z	Z						
5	Z	Z	Z					
6	Z	N ¹	Z	Z				
7	Z	Z	Z	Z	Z			
8	Z	Z	N ¹	Z	Z	Z		
9	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	
10	Z	Z	Z	N ¹	Z	Z	Z	Z
11	Z	N	Z	Z	Z	Z	N ²	Z
12	Z	N	Z	³	N ¹		Z	N ²
13	Z	N	Z					Z
14	Z	N						
15	Z	Z						
16	Z	N						
17	Z	N						
18	Z	N						
19	Z	N						
20	Z	N						
21	Z	Z						
22	Z	N						
23	Z	(N)						
24	Z	(N)						
25	Z	(N)						

ROZDZIAŁ 3

Uogólnienia ciągów żonglerskich

W ostatnim, trzecim rozdziale przedstawiamy pewne uogólnienia ciągów żonglerskich, które w naturalny sposób pojawiły się na skutek rozwoju matematycznego opisywania żonglerki. Rozważamy także, czy dla zbiorów ciągów żonglerskich można zdefiniować pewne struktury algebraiczne.

3.1. Multipleksowe ciągi żonglerskie

Pierwszym, dość naturalnym sposobem na uogólnienie jest rezygnacja z założenia, że w każdej chwili w ręce znajduje się co najwyżej jeden przedmiot. Z tego wynika, że możliwe jest wyrzucenie wielu przedmiotów w tym samym momencie. Prowadzi to do definicji multipleksowych ciągów żonglerskich, których elementami nie są już liczby naturalne a zbiory z powtórzeniami liczb naturalnych. Formalną definicję przedstawiamy poniżej, przy czym ze względu na przyjęty standard, zbiory z powtórzeniami będziemy umieszczać w nawiasach kwadratowych.

Definicja 19 (Multipleksowe ciągi żonglerskie).

Multipleksowym ciągiem żonglerskim nazywamy ciąg zbiorów z powtórzeniami liczb naturalnych $\mathbf{s} = S_1 S_2 \dots S_n = [s_1^1 s_1^2 \dots s_1^{d_1}] [s_2^1 s_2^2 \dots s_2^{d_2}] \dots [s_n^1, s_n^2 \dots s_n^{d_n}]$, jeżeli spełniony jest następujący warunek

$$\forall_{i \in \{1, \dots, n\}} |S_i| = |\{s_j^k : s_j^k + j \pmod{n} = i, j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, d_j\}\}|.$$

W tym rozdziale ciągi te oznaczmy jako \mathbb{M} . Ponadto utożsamiamy multipleksowe ciągi żonglerskie, które różnią się jedynie liczbą elementów zerowych w zbiorach będących elementami ciągu.

Fakt 2.

Każdy ciąg zonglerski, po zamianie jego elementów na singletony tych elementów, jest multipleksowym ciągiem zonglerskim.

Na przykład ciąg zonglerski 423 możemy przekształcić na multipleksowy ciąg zonglerski [4][2][3].

Mimo, że multipleksowe ciągi zonglerskie są strukturą dużo bogatszą, to można dla nich zdefiniować w sposób analogiczny, większość twierdzeń odnoszących się do zwykłych ciągów zonglerskich. Część z nich krótko omówimy poniżej.

Definicja 20 (Wartość średnia multipleksowych ciągów zonglerskich).

Dla multipleksowego ciągu zonglerskiego \mathbf{s} jego wartość średnią a definiujemy wzorem

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} s_i^j.$$

Twierdzenie 18 (Twierdzenie o wartości średniej dla multipleksowych ciągów zonglerskich).

Wartość średnia a multipleksowego ciągu zonglerskiego \mathbf{s} , zdefiniowana jak powyżej, jest zawsze liczbą naturalną.

Możemy zdefiniować również różne podzbiory multipleksowych ciągów zonglerskich.

- \mathbb{M}^m - multipleksowe ciągi zonglerskie ograniczone przez m , w których ograniczony przez m jest każdy element s_i^j .
- \mathbb{M}_n - multipleksowe ciągi zonglerskie o określonej długości, przy czym bierzemy pod uwagę długość ciągu niezależnie od mocy poszczególnych zbiorów.
- ${}_a\mathbb{M}$ - multipleksowe ciągi zonglerskie o określonej średniej zadanej w definicji 20.

Podobnie możemy określić też zbiory $\mathbb{M}_n^m, {}_a\mathbb{M}^m, \mathbb{M}_n, {}_a\mathbb{M}_n^m$ utworzone ze zdefiniowanych powyżej. Okazuje się, że dla dowolnych liczb naturalnych a oraz m takich, że $a < m$, oraz dowolnego multipleksowego ciągu żonglerskiego $\mathbf{s} \in {}_a\mathbb{M}^m$ możemy określić jego stan $\phi(\mathbf{s})$, który teraz nie będzie już ciągiem binarnym a ciągiem długości m o wartościach naturalnych, których suma wyrazów wynosi a . Istnienie stanów i ich skończona, choć znacznie większa, liczba umożliwi nam konstrukcję grafów stanów. To otwiera drogę do powtórzenia innych rozważań z rozdziału drugiego. Możemy więc mówić o multipleksowych ciągach żonglerskich pierwszych czy twierdzeniu o faktoryzacji. Prawdziwy okazuje się również fakt, że $\mathbb{M}^m \in \text{REG}$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Poza wieloma podobieństwami okazuje się, że o multipleksowych ciągach żonglerskich możemy powiedzieć coś więcej.

Definicja 21 (Działanie składania multipleksowych ciągów żonglerskich).

Niech będą dane dwa multipleksowe ciągi żonglerskie $\mathbf{s} = S_1 S_2 \dots S_n$ oraz $\mathbf{s}' = S'_1 S'_2 \dots S'_n$ należące do \mathbb{M}_n . Wtedy definiujemy dwuargumentowe działanie składania, które oznaczamy przez \otimes , dane wzorem

$$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}' = (S_1 \cup S'_1)(S_2 \cup S'_2) \dots (S_n \cup S'_n).$$

Twierdzenie 19 (O wartości średniej złożenia).

Niech $\mathbf{s} \in {}_a\mathbb{M}_n$ oraz $\mathbf{s}' \in {}_{a'}\mathbb{M}_n$. Wtedy $\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}' \in {}_{a+a'}\mathbb{M}_n$.

Definicja 21 umożliwia składanie jedynie ciągów o równej długości. Można jednak w dość naturalny sposób zdefiniować ją w sytuacji ogólnej, powtarzając każdy ciąg tyle razy by uzyskać wspólną długość.

Definicja 22 (Działanie składania dla różnych długości).

Niech będą dane dwa multipleksowe ciągi żonglerskie $\mathbf{s} = S_1 S_2 \dots S_n$ oraz $\mathbf{s}' = S'_1 S'_2 \dots S'_l$. Niech $c = \text{NWW}(n, l)$. Wtedy

$$\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}' = \underbrace{(\mathbf{s} \mathbf{s} \dots \mathbf{s})}_{\frac{c}{n} \text{ razy}} \otimes \underbrace{(\mathbf{s}' \mathbf{s}' \dots \mathbf{s}')}_{\frac{c}{l} \text{ razy}}.$$

Wniosek 5.

Niech $\mathbf{s} \in {}_a\mathbb{M}_n$ oraz $\mathbf{s}' \in {}_{a'}\mathbb{M}_{n'}$. Wtedy $\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}' \in {}_{a+a'}\mathbb{M}_{\text{NWW}(n,n')}$.

Twierdzenie 20 (O rozkładzie).

Załóżmy, że utożsamimy zwykłe ciągi zonglerskie z multipleksowymi ciągami zonglerskimi złożonymi z singletonów elementów ciągu zonglerskiego. Wtedy, każdy multipleksowy ciąg zonglerski jest iloczynem zwykłych ciągów zonglerskich względem działania \otimes przy czym rozkład ten nie jest jednoznaczny.

Przykład 4.

By zilustrować powyższe prezentujemy teraz kilka przykładów. Warto zauważyć, że podpunkt 4 dowodzi niejednoznaczności rozkładu.

1. $[54][2][4] = 504 \otimes 420$.
2. $[54][22][2] = 522 \otimes 420$.
3. $[333] = 3 \otimes 3 \otimes 3$.
4. $[43][2][3] = 423 \otimes 300 = 420 \otimes 303$.

Dzięki twierdzeniu o rozkładzie okazuje się, że multipleksowe ciągi zonglerskie, mimo dużo bogatszej struktury są w pewnym sensie “zbudowane” ze zwykłych ciągów zonglerskich. Na tej obserwacji kończymy omawianie multipleksowych ciągów zonglerskich.

3.2. Ciągi zonglerskie o wartościach całkowitych

W poprzednim podrozdziale podaliśmy sposób uogólnienia ciągów zonglerskich, bardzo naturalny z punktu widzenia zonglerki, jednak stosunkowo skomplikowany z matematycznego punktu widzenia. Teraz przedstawiamy zupełnie przeciwne uogólnienie, które jest bardzo naturalne z punktu widzenia matematyka, jednak jego interpretacja zonglerska jest co najmniej

egzotyczna. W przypadku ciągów zonglerskich zakładamy, że wyrazami ciągu są liczby naturalne. Teraz osłabimy to założenie dopuszczając także liczby ujemne.

Definicja 23 (Ciągi zonglerskie o wartościach całkowitych).

Ciągami zonglerskimi o wartościach całkowitych nazywamy elementy zbioru

$$\mathbb{U} = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n : \forall_{1 \leq j \neq k \leq n} s_j + j \not\equiv s_k + k \pmod{n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Również dla ciągów zonglerskich o wartościach całkowitych możemy pokazać definicje i twierdzenia analogiczne jak dla zwykłych ciągów zonglerskich. Oczywiście pojawią się drobne różnice takie jak fakt, że średnia nie jest już liczbą naturalną tylko całkowitą. Nie będziemy tu kontynuować tych rozważań. Zamiast tego zastanowimy się nad interpretacją w kontekście zonglerki.

W zwykłych ciągach zonglerskich wyrazy określają w pewnym sensie czas pomiędzy kolejnymi wyrzutami. Dopuszczenie liczb ujemnych powoduje, że przedmiot zostaje złapany zanim został wyrzucony, czyli inaczej mówiąc porusza się do tyłu w czasie. Mimo, iż wydaje się, że nie ma to większego sensu Andrew Conway zaproponował w [5] teoretycznie możliwą fizyczną realizację.

Fakt 3 (Żonglerka wysokich energii).

Żonglerka wysokich energii opiera się na kilku postulatach

- *Przedmiot zbudowany z materii, poruszający się do tyłu w czasie, jest równoważny przedmiotowi zbudowanemu z antymaterii, poruszającego się w czasie do przodu.*
- *Jeśli przedmiot z materii i antymaterii znajdują się jednocześnie w ręce, następuje anihilacja i cała masa zamienia się w energię.*
- *W każdym momencie, poprzez dostarczenie dużej energii, może nastąpić natychmiastowa kreacja pary przedmiotów, jednego z materii i drugiego z antymaterii.*

Oczywiście interpretacja ta mimo, że możliwa teoretycznie jest raczej humorystyczna ze względu na fakt że energia wyzwolona przy anihilacji i potrzebna do kreacji byłaby olbrzymia zgodnie z równaniem $E = mc^2$.

Oprócz dwóch przedstawionych powyżej sposobów na uogólnienie ciągów żonglerskich, istnieje wiele innych, często używanych w praktyce przez żonglerów. Są to między innymi:

- Notacja synchroniczna - wykorzystywana przy wykonywaniu wyrzutów jednocześnie kilkoma rękami,
- Notacja synchroniczno-asynchroniczna - będąca połączeniem standardowych ciągów żonglerskich i notacji synchronicznej,
- Préchac notatnion - służąca do opisu żonglerki wieloosobowej z naciśkiem na każdą osobę oddzielnie,
- 4-hand notation - używana przy opisie żonglerki dwuosobowej,
- Causal Diagrams - przedstawiająca żonglerkę wieloosobową w postaci graficznej,
- Multi-hand notation - zapisuje żonglerkę wieloosobową w postaci macierzowej.

Okazuje się jednak, że wymienione powyżej uogólnienia nie są zbyt interesujące pod względem matematycznym, więc nie przedstawimy ich szczegółowych opisów. Zamiast tego zastanowimy się nad innym aspektem a mianowicie strukturami algebraicznymi.

3.3. Struktury algebraiczne na zbiorach ciągów żonglerskich

W celu zbudowania pewnych struktur algebraicznych na zbiorach ciągów żonglerskich lub ich uogólnień będą potrzebne nam działania. W poprzednich

częściach pracy pojawiły się dwie kandydatury na takie działanie dwuargumentowe. Mianowicie składanie multipleksowych ciągów żonglerskich przedstawione w definicji 22 oraz konkatencja ciągów którą formalnie prezentujemy poniżej.

Definicja 24 (Konkatencja ciągów).

Dane są dwa ciągi $\mathbf{a} = a_1a_2 \dots a_n$ oraz $\mathbf{b} = b_1b_2 \dots b_m$. Wtedy definiujemy działanie dwuargumentowe konkatencji, które będziemy oznaczać \odot wzorem

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = a_1a_2 \dots a_nb_1b_2 \dots b_m.$$

Podstawowym pytaniem jest: w jakich podzbiorach ciągów żonglerskich i ich uogólnień, działania \otimes oraz \odot są wewnętrzne i jakie mają własności.

Definicja 25 (Ciągi żonglerskie o określonym stanie).

Niech ${}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{S}^m$ oraz ${}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{M}^m$ będą zbiorami ciągów żonglerskich oraz multipleksowych ciągów żonglerskim o określonym stanie \mathbf{M} , czyli odpowiednio

$${}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{S}^m = \{\mathbf{s} \in {}_a\mathbb{S}^m : \phi(\mathbf{s}) = \mathbf{M}\},$$

$${}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{M}^m = \{\mathbf{m} \in {}_a\mathbb{M}^m : \phi(\mathbf{m}) = \mathbf{M}\}.$$

Twierdzenie 21 (Własności działania \odot).

Niech a oraz m będą dowolnymi liczbami naturalnymi takimi, że $a < m$, natomiast \mathbf{M} dowolnym stanem w ${}_a\mathbb{S}^m$ lub ${}_a\mathbb{M}^m$. Wtedy działanie \odot jest wewnętrzne w zbiorze ${}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{S}^m$ i w zbiorze ${}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{M}^m$. Ponadto działanie \odot jest łączne i nieprzemienne. Dodatkowo, jeśli dodamy do każdego z powyższych zbiorów ciąg pusty, który oznaczamy symbolem λ , to będzie on elementem neutralnym tego działania. Wtedy $({}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{S}^m, \lambda, \odot)$ oraz $({}^{\mathbf{M}}_a\mathbb{M}^m, \lambda, \odot)$ są monoidami.

Jak pokazuje powyższe twierdzenie, dzięki działaniu \odot otrzymaliśmy pewne stosunkowo proste struktury algebraiczne na pewnych podzbiorach. Warto zauważyć, że są to monoidy nieskończone nieprzemienne. Przejdźmy teraz do analizy drugiego działania.

Twierdzenie 22 (Własności działania \otimes).

Działanie \otimes w wersji uogólnionej dla ciągów różnych długości jest działaniem wewnętrznym w całym zbiorze \mathbb{M} . Jest ono łączne i przemienne. Ponadto jeśli za e weźmiemy cały zbiór tych multipleksowych ciągów zonglerskich, w których żaden zbiór nie zawiera elementów różnych od 0 , to e będzie elementem neutralnym działania. Wtedy (\mathbb{M}, e, \otimes) jest nieskończonym monoidem przemennym.

Zdefiniowaliśmy więc dwa działania i pewne struktury algebraiczne dla pewnych podzbiorów ciągów zonglerskich. Interesującym zagadnieniem mogłoby być przeanalizowanie, czy w podzbiorach multipleksowych ciągów zonglerskich o wartościach całkowitych możliwe byłoby zbudowanie bardziej złożonych struktur, na przykład grup. Jednak wymagałoby to nowej definicji działania składania i wychodzi poza zakres tej pracy.

Zakończenie

W powyższej pracy przedstawiliśmy wybrane zagadnienia z teorii ciągów żonglerskich i ich uogólnień w szczególności skupiając się na aspektach kombinatorycznych i teoriografowych. Zwróciliśmy również uwagę na własności teoriomnogościowe, struktury algebraiczne, pewne analogie z teorii liczb oraz języki formalne. W szczególności podaliśmy też nowe wyniki doświadczalne dotyczące ciągów żonglerskich pierwszych. Mimo, że teoria ta nie jest zbyt popularna, a dysertacja ta jest prawdopodobnie pierwszą pracą naukową w języku polskim, to omówiliśmy jedynie część wszystkich zagadnień. Poniżej przedstawiamy część z innych istotnych kierunków badań teorii ciągów żonglerskich, które ze względu na rozmiar pracy, nie zostały omówione.

- Związki ciągów żonglerskich z teorią węzłów i grupami warkoczowymi omówione w [14].
- Zagadnienia probabilistyczne i błądzenie losowe w grafie stanów przedstawione w [19].
- Inne nieomówione uogólnienia ciągów żonglerskich.
- Twierdzenia Shannona opisane w jego pracy [18].
- Związki z geometrią przedstawione w [11].
- Inne bardziej specyficzne zagadnienia takie jak zawarte w [7].
- A także wiele aspektów nie do końca związanych z teorią ciągów żonglerskich, ale powiązanych z innymi matematycznymi metodami opisu żonglerki, fizyki ruchu czy nawet żonglujących robotów.

W teorii tej zostaje też wiele nowych kierunków rozwoju jak i problemów otwartych takich jak przedstawione zagadnienia ciągów żonglerskich pierwszych. Uważamy, że badania komputerowe, przeprowadzone w ramach tworzenia tej pracy, które dały kilka nowych wyników, w pewnym minimalnym

stopniu przybliżają nas do rozwiązania tych problemów otwartych. Mamy również nadzieję, że czytelnik po zapoznaniu się z zawartością tej pracy, zainteresuje się tematyką ciągów żonglerskich i będzie kontynuował zgłębianie tej teorii.

Bibliografia

- [1] B. Beever. Siteswap ben's guide to juggling patterns. 2002,
<http://www.jugglingle.com/pdf/BenBeeversGuidetoJugglingPatterns.pdf>.
- [2] J. Boyce. The longest prime siteswap patterns. 2003,
<http://www.jugglethis.net/files/misc/prime.pdf>.
- [3] J. Boyce. Jdeep. Program komputerowy 2005,
<http://sourceforge.net/projects/jugglinglab>.
- [4] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham, C. Wright. Juggling drops and descents. *American Mathematical Monthly* 101(1994), 507-519.
- [5] A. Conway. High energy juggling. 1997,
<http://www.juggling.org/~conway/juggler/energy.html>.
- [6] C. Dorgerloh, J. Wirtgen. Once again: Finding simple cycles in graphs. raport, Institut fur Informatik V, Universitat Bonn, Bonn 1997.
- [7] A. Engels, S. Mauw. Why men (and octopuses) cannot juggle a four ball cascade. Raport, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, Eindhoven 1999.
- [8] J. Friberg. Methods and traditions of babylonian mathematics: Plimpton 322, pythagorean triples, and the babylonian triangle parameter equations. *Historia Mathematica* 8(1981), 77-318.
- [9] B. Giduz. The joy of zero-g juggling. *Juggler's World* 37(1985), 4-6.
- [10] D. Huylebrouck. Mathematics in (central) africa before colonization. *Anthropologica et praehistorica* 117(2006), 135-162.
- [11] A. Knutson, T. Lam, D. Speyer. Positroid varieties: juggling and geometry. *Compositio Mathematica* 149(2013), 1710-1752.

- [12] A. Kwiatkowska. Sztuka cyrkowa – sztuka ludzkich możliwości. Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Toruń 2005.
- [13] A. Lewbel. Research in juggling history. 2002,
<https://www2.bc.edu/~lewbel/jugweb/history-1.html>.
- [14] M. Macauley. Braids and juggling patterns. Praca magisterska, Harvey Mudd College, Claremont 2003.
- [15] A. Mays. Combinatorial aspects of juggling. Praca magisterska, University of Melbourne, Melbourne 2006.
- [16] W. Murray. Möbius polynomials. *Mathematics Magazine* 85(2012), 376-383.
- [17] B. Polster. *The Mathematics of Juggling*. Springer, New York 2002.
- [18] C. Shannon. Scientific aspects of juggling. *Claude Elwood Shannon–Collected Papers* (1993), 850-864.
- [19] G. S. Warrington. Juggling probabilities. *American Mathematical Monthly* 112(2005), 105-118.

Oświadczenie

Ja, niżej podpisany oświadczam, iż przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

.....

data

.....

podpis